Eva Caianiello

Les sources des textes d’abaque italiens du XIVe siècle: les échos d'un débat en cours

Reti Medievali Rivista, 14, 2 (2013)
<http://rivista.retimedievali.it>

Towards a critical edition of Fibonacci’s *Liber Abaci*

ed. by Giuseppe Germano

Firenze University Press

Reti Medievali Rivista, 14, 2 (2013)
<http://rivista.retimedievali.it>
ISSN 1593-2214 © 2013 Firenze University Press
DOI 10.6092/1593-2214/408
Studies on Fibonacci's Liber Abaci
ed. by Giuseppe Germano

Les sources des textes d'abaque italiens du XIVe siècle: les échos d'un débat en cours

par Eva Caianiello

Après la parution du *Liber Abaci*[1] (1202, réédité en 1228), au cours de la deuxième moitié du XIIIe jusqu'à la moitié du XVIe siècle environ, apparaissent, surtout en Italie, des écoles de mathématiques (écoles ou *botteghe* d'abaque) – destinées aux marchands, mais aussi bien à tous ceux qui nécessitaient des mathématiques pour leur travail[2] –, des maîtres qui y enseignaient (maîtres d'abaque) et quelques centaines de manuels, appelés manuels d'abaque[3], en langue vernaculaire, que ceux-ci utilisaient. Comme le souligne M. Folkerts[4]:

> The word *abbacus* in this context is confusing, because normally *abacus* is the name for the counting board, but the mathematics taught in the libri d'abbaco is not done with the help of a counting board, but with a pen on paper. The name abbacus was derived from the *Liber Abaci* written by Leonardo Fibonacci (…).

Dès 1960, les éditions et les commentaires de G. Arrighi et de l'école de Sienne[5], et le catalogue de ces manuscrits par W. Van Egmond[6] en 1980, ont

[1] B. Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*, 2 vols, I, *Il* Liber abaci*, pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano C. 1, 2616, Badia Fiorentina, n. 73 da B. Boncompagni*, Rome 1857-1862.

[2] Comme les changeurs, les techniciens, les fonctionnaires des Communes, les architectes.

[3] On trouve aussi d'autres titres comme: *Libro o trattato d'aritmetica*, *Libro o trattato d'Algorismo*, *Algorismo*, *Libro di ragioni*.

[4] M. Folkerts. *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italian* Abbacus *Culture*, dans «Annals of Science», 68 (2011), 2, pp. 1, 282-284.

[5] Une équipe de travail qui, sous la direction de R. Franci et L. Toti Rigatelli, a poursuivi le travail de G. Arrighi et a étudié et publié 26 traités d'abaque dans les «Quaderni del Centro

permis leur diffusion et une connaissance plus approfondie parmi les spécialistes et, pour ce qui concerne l'algèbre, ils ont permis de dater le commencement de l'algèbre des équations du troisième et quatrième degré en Italie au début du XIVe siècle.

Ces manuels contiennent des instructions au sujet de l'arithmétique, utilisent les chiffres indo-arabes et résolvent des problèmes (*ragioni*), surtout à caractère commercial, par des méthodes variées: règle du trois, fausse position, algèbre. À côté de ces textes, nous trouvons également des traités de géométrie pratique et, dans une moindre mesure, des traités d'algèbre.

Bien que ces manuels puissent apparaître inférieurs par rapport au modèle du *Liber Abaci* (leurs méthodes étant plus prescriptives qu'explicatives, l'aspect théorique négligé, l'apprentissage fondé sur l'imitation des problèmes résolus, la démonstration remplacée par la preuve numérique etc.), ils ont contribué, avec les écoles d'abaque, à la diffusion des mathématiques dans les activités professionnelles et à la consolidation – également grâce à la circulation de la pratique algébrique, qui fut, par ailleurs, presque absente[7] du curriculum universitaire jusqu'à la moitié du XVIIe siècle – d'une culture favorable aux grands exploits de l'algèbre italienne du XVIe siècle et de la science moderne[8].

Pour ce qui concerne l'algèbre, ces manuels présentent des équations du troisième et du quatrième degré qui sont absentes dans les traités d'al-Khwārizmī[9] (et de ses adaptations latines)[10] et de Fibonacci. En outre, à la

Studi di Matematica Medioevale dell'Università di Siena». Il ne s'agit pas, pourtant, d'éditions critiques des textes ou de leurs traductions dans une langue moderne.

6 W. Van Egmond, *Practical mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian* Abacus *manuscripts and printed books to 1600*, Florence 1980.

7 Une exception est constituée par le *Quadripartitum numerorum* de Jeans de Mur (1343) qui témoigne de l'enseignement de l'algèbre dans les milieux académiques. Voir G. L'Huillier, *Le Quadripartitum numerorum de Jean de Meurs. Introduction et édition critique*, Genève-Paris 1990, cité dans A. Heeffer, *Text production reproduction and appropriation within the abbaco tradition: A case study*, dans «SCIAMVS. Sources and Commentaries in Exact Sciences», 9 (2008), p. 101, référence 1, pp. 101-145.

8 Pour une évaluation de l'importance de la culture de l'abaque pour la formation de la science moderne voir, entre autres, E. Gamba, V. Montebelli, *La matematica abachistica tra recupero della tradizione e rinnovamento scientifico,* in *Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento*. Atti del Convegno internazionale di studio *Giovan Battista Benedetti e il suo tempo*, Venezia 1987, pp. 169-202.

9 Il existe une édition critique du traité d'algèbre d'al-Khwārizmī, voir *Al-Khwārizmī: Le Commencement de l'Algèbre*. Texte établi, traduit et commenté par Roshi Rashed, Paris 2007.

10 Ils existent trois versions latines du traité d'al-Khwārizmī: 1. une traduction partielle effectuée par Gérard de Crémone (1114-1187), titrée *Liber algebrae et almucabola* dont une édition critique a été publiée par B. Hughes, voir *Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī 's Al-Jabr:A Critical Edition*, [Hughes, B éd] dans «Mediaeval Studies», 48 (1986); 2. une traduction partielle effectuée par Robert de Chester (ca 1141) éditée par B. Hughes (*Robert of Chester's Latin Translation of Al-Khwārizmī 's Al-Jabr: A New Critical Edition*, éd. par B.

différence de ces derniers, le propos essentiel de l’algèbre de l’abaque des premières décades du XIVe siècle est centré surtout sur des réalisations concrètes, comme la résolution de problèmes de la pratique marchande. Pour ce qu’on vient d’exposer, il s'ensuit que, concernant l’origine de l’algèbre italienne du XIVe siècle, il faut rechercher d'autres sources et reconstruire leur transmission en Italie.

Une autre question s’impose alors: quelle a été, parmi les manuscrits des premières décades du XIVe siècle, la première algèbre italienne ?

Il y a au moins quatre candidatures à cette primogéniture: le *Libro di ragioni* de Paolo Gerardi[11] de Florence, écrit à Montpellier en 1328, le *Tractatus Algorismi* de Jacopo da Firenze[12] écrit à Montpellier en 1307, le *Tractatto dell’arismetricha*[13] écrit à Pise vers 1320 (datation inférée sur la base de références internes au texte), et enfin le *Libro di molte ragioni d’abaco*, le manuscrit 1754 de la Bibliothèque d’État de Lucques[14], datée de 1330 sur la base de références internes au texte. Une place à part est occupée par le traité *Aliabraa-Argibra* de maître Dardi de Pise écrit en 1344, qui est le premier texte en italien entièrement consacré à l’algèbre[15]; il présente plus de 198 règles et ne partage pas les finalités pratiques des manuels susdits.

Hughes, Wiesbaden 1989) ; 3. une traduction du texte complet attribuée à Guillaume *de Lunis* ou Lunense contenue dans le manuscrit Lyell 52 (siècle XIIIe) de la Bodleian Library, Oxford (W. Kaunzner, *Über eine frühe lateinische Bearbeitung der Algebra al-Khwārizmī s in MS Lyell 52 der Bodleian Library Oxford*, dans «Archive for History of Exact Sciences», 32 [1985], 1, pp. 1-16).

11 Contenu dans le manuscrit Magl. CL. XI, 87 de la Biblioteca Nazionale di Firenze publié par W. Van Egmond, *The Earliest Vernacular Treatment of Algebra: the* Libro di ragioni *of Paolo Gerardi (1328)*, dans «Physis», 20 (1978), pp. 155-189. La description de l’ouvrage est dans L.C. Karpinski, *The Italian Arithmetic and Algebra of Master Jacob of Florence, 1307*, dans «Archeion», 11 (1929), pp. 170-177.

12 On a trois copies du manuscrit: *F* (= Firenze, Ricc. 2236), date *post quam* XIVe; *M* (= Milano, Biblioteca Trivulziana, Trivulz. 90, date *post quam* début du XVe siècle; *V* (= Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, Vat. Lat. 4826), date *post quam* moitié du XVe. L’édition complète du traité avec la traduction en anglais moderne a été publiée par J. Høyrup. *Jacopo da Firenze’s* Tractatus Algorismi *and Early Italien* Abbacus *Culture*. Basel-Boston-Berlin 2007.

13 Contenu dans le manuscrit Ricc. 2252 de la Biblioteca Riccardiana de Florence (ff. 1*r*-71*v*). Voir R. Franci, *Leonardo Pisano e la Trattatistica dell’Abaco in Italia nei secoli XIV e XV*, dans «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 23 (2003), 2, pp. 33-54, en particulier aux pp. 41-44, et R. Franci, *The History of algebra in Italy in the 14th and in 15th centuries. Some remarks on recent historiography*. Actes d’Història de la Ciència i de la Tècnica, dans «NOVA ÈPOCA», 3 (2010), 2, pp. 175-194.

14 *Libro d’Abaco. Dal Codice 1754 (sec. XIV) della Biblioteca Statale di Lucca*, éd. par G. Arrighi, Lucca 1973.

15 Voir W. Van Egmond, *The Algebra of Master Dardi of Pisa*, dans «Historia mathematica», 10 (1983), pp. 399-421.

L'opinion la plus répandue parmi les historiens des mathématiques[16] est que le *Liber Abaci* – ou au moins ses onze premiers chapitres, comme le souligne R. Franci[17] – a été le précurseur de la tradition textuelle de l'abaque. En outre, concernant l'origine de l'algèbre des premiers textes d'abaque en italien, Van Egmond a établi que le *Libro di ragioni* de Paolo Gerardi (1328) a été le plus ancien texte d'algèbre en italien[18] connu jusqu'ici.

Ces idées ont été contestées par de nombreux travaux de J. Høyrup[19]. Il soutient que Fibonacci n'a pas été un précurseur, mais seulement un exposant important d'une tradition d'abaque préexistante et que le premier texte d'algèbre en italien a été le *Tractatus Algorismi* de Jacopo da Firenze. En particulier, il a articulé l'ensemble de ses positions dans son ouvrage, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italian* Abbacus *Culture,* qui a fait l'objet d'une querelle, encore en cours[20]. Parmi les participants au

16 Pour une synthèse des différentes positions voir Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 30-31, référence 69.

17 Selon Franci, *Leonardo Pisano e la Trattatistica dell'Abaco* cit., p. 36, «les historiens des mathématiques qui appellent *trattati d'abaco* ces textes en vulgaire proposent surtout des arguments qui sont présents dans les onze premiers chapitres du *Liber Abaci*. Même si on ne peut nier que le traité de Léonard est l'archétype de ces textes, il faut remarquer, par contre, que chaque auteur a développé son travail de façon autonome, en choisissant les sujets et en les adaptant aux exigences de ses interlocuteurs».

18 Van Egmond, *The Earliest Vernacular Treatment of Algebra* cit.

19 Voir J. Høyrup, *Jacobus de Florentia,* Tractatus algorismi *(1307)*, dans «Centaurus», 42 (2000), pp. 21-69; J. Høyrup, *The founding of Italian vernacular algebra*, dans *Commerce et mathematiques du moyen âge à la renaissance autour de la Méditerranée.* Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes (Beaumont de Lomagne, 13-16 May 1999), Toulouse 2001, pp. 129-156; J. Høyrup, *Leonardo Fibonacci and Abbaco Culture: a Proposal to Invert the Roles*, dans «Revue d'histoire des mathématiques», 11 (2005), pp. 23-56; J. Høyrup, *Jacopo da Florence and the Beginning of Italian Vernacular Algebra*, dans «Historia Mathematica», 33 (2006), pp. 4-42; Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 5-6, 14 et suivantes, 23-25, 30-42.

20 Voir W. Van Egmond, *Iacopo da Florence's* Tractatus Algorismi *and Early Italien* Abbacus *Culture edited by Jens J. Høyrup. Science networks-Historical Studies 34*, dans «Aestimatio», 6 (2009), pp. 37-47, <http://www.ircps.org/aestimatio/6/37-47> (site consulté le 13/07/2013); J. Høyrup, *A response to Van Egmond on J. Høyrup, Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italien* Abbacus *Culture*, accessible dans le site internet de J. Høyrup <http://rudar.ruc.dk//bitstream/1800/5146/1/AnswerToVanEgmond.pdf> (site consulté le 13/07/2013); J.A. Oaks, *Essay Review: Medieval Italian Practical Mathematics: Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italian* Abbacus *Culture*, in «CSHPM/SCHPM [The Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics / La Société Canadienne d'Histoire et de Philosophie des Mathématiques] Bulletin», 45 (2009), <http://www.cshpm.org/archives/bulletins/HoyrupReviewFall2009.pdf> (site consulté le 13/07/2013); J. Høyrup, *Answer to Jeffrey Oaks' review of Jens Høyrup, Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italien* Abbacus *Culture*, <http://www.cshpm.org/archives/bulletins/AnswerToOaks.pdf> (site consulté le 13/07/2013); J.A. Oaks, *Response to Jens J. Høyrup's "Answer to Jeff Oaks'review of Jens Høyrup Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi *and Early Italian* Abbacus *Culture, Basel etc.; Birkhauser, 2007"*, accessible dans le site internet de J.A. Oak,

débat, Van Egmond, J.A. Oaks, Folkerts ont débattu ouvertement des thèses d’Høyrup, tandis que Franci, A. Heeffer l’ont fait indirectement, exprimant leurs idées dans des articles à caractère plus général.

Sans entrer dans le vif de la querelle, qui est très complexe et articulée, mon propos est, quand même, de synthétiser les thèses centrales d’Høyrup et d’expliquer les différentes positions prises par les participants au débat au fin de donner au lecteur le moyen de s’orienter parmi les différents points de vue. Je vais, également, exposer ma position dans quelques cas (en particulier sur le rôle de Fibonacci) et mon point de vue final.

Je présenterai, donc, dans cet article, les thèses d’Høyrup, ainsi qu’elles ont été exposées très clairement par Oaks[21], selon trois thèmes centraux: 1. Quelle a été la première algèbre de l’abaque en italien?; 2. Le rôle de Fibonacci dans la tradition de l’abaque; 3. Les sources de l’algèbre de l’abaque.

1. *La première algèbre de l’abaque en italien*

1.1 *Le* Tractatus algorismi *de Jacopo da Firenze: la position d’Høyrup*

Høyrup prétend que le *Tractatus algorismi*, composé par le florentin Jacopo à Montpellier en 1307, est le premier traité d’algèbre attesté en Italie[22]. Il justifie son affirmation sur la base de l’examen de la cohérence stylistique des trois manuscrits[23] copies du *Tractatus algorismi* qui nous ont parvenus, notés *F*, *M*, *V* dont il n’y a que *V*, le plus récent, incluant une section algébrique (chapitres 16-17, ff. 36*v*-43*v*) qui n’est pas présente dans *M* et *F*. Høyrup veut démontrer la cohérence stylistique de *V* avec les parties communes à *M*+*F* et avec celles non communes. Donc, comme le souligne Folkerts[24]: «The main argument for Høyrup’s conclusion is the stylistic coherency between the algebraic and the non-algebraic part in *V*». À travers une analyse textuelle de *V*, *F*, *M*, qui utilise aussi la distribution statistique des discordances orthographiques des mots[25], Høyrup conclut que:

<http://pages.uindy.edu/~oaks/Articles/ResponseHøyrup.pdf> (consulté le 13/07/2013); Franci, *The History of algebra in Italy* cit.; A. Heeffer, *Text production reproduction and appropriation within the abbaco tradition: A case study*, dans «SCIAMVS. Sources and Commentaries in Exact Sciences», 9 (2008), pp. 211-256; Folkerts, *Jacopo da Firenze’s* Tractatus Algorismi cit.

21 Oaks, *Essay Review* cit.

22 Voir Høyrup, *Jacopo da Firenze’s* Tractatus Algorismi cit., pp. 5-25.

23 Voir référence n. 12.

24 Folkerts, *Jacopo da Firenze’s* Tractatus Algorismi cit., p. 283.

25 Høyrup, *Jacopo da Firenze’s* Tractatus Algorismi cit., pp. 14 et suivantes.

Thèse 1.a) Les extra-chapitres de *V* qui comprennent l'algèbre appartiennent au traité original de Jacopo. «*V* is quite faithful descendant of Jacopo's original (or at least of the common archetype for all three manuscripts) whereas the closely related *F* and *M* are outcome of a process of rewriting and abridgement»[26].

Il s'ensuit, par conséquent, que:

Thèse 1.b) Le *Tractatus Algorismi di Jacopo da Firenze* (1307) contient le plus ancien texte d'algèbre en italien.

En outre:

Thèse 1.c) L'algèbre de Jacopo a été la première algèbre d'abaque jamais écrite. Il a appris l'algèbre puisant dans une aire inconnue (?), peut-être ibéro-provençale.

1.2 *Le débat*

Concernant la Thèse 1.a, Heeffer[27] accepte que l'algèbre dans le manuscrit *V* appartienne au traité original de Jacopo. Oaks, par contre, estime inappropriée l'utilisation qu'Høyrup fait des méthodes statistiques et fausses, entre autres, les références internes entre les extra-chapitres de *V* et les parties communes à *M+F+V*[28].

Concernant l'utilisation de la statistique dans la philologie, il y a un ample débat parmi les philologues et plusieurs voix critiques se lèvent[29], comme celle de G. Germano, qui souligne:

> Je ne crois pas, en vérité, que la statistique peut être appliquée à la philologie, parce que les variables impliquées sont nombreuses et très incertaines. Les oscillations (...) sont capricieuses même dans la pratique de l'écriture créative (c'est-à-dire quand on ne copie pas, ou lorsque l'auteur copie soi-même) et, par conséquent, l'analyse statistique ne peut pas prouver quoi que ce soit, car, à partir d'un original fluctuant déjà capricieusement, le copiste peut ajouter au caprice de l'auteur son caprice, qui

[26] *Ibidem*, pp. 5-6.

[27] Heeffer, *Text production reproduction and appropriation* cit., pp. 102, 113. Voir aussi Oaks, *Response to Jens J. Høyrup's Answer* cit., p. 2, référence 3.

[28] Concernant les prevues d' Høyrup, Oaks soutient que: «(1) he misuses statistics regarding the spellings of words, (2) at the end of the first chapter he promises further evidence that the algebra in *V* dates well before 1328, but never delivers it, and (3) the cross references which he claims link the extra Chapter 22 with the common Chapters 14-15 do not exist» (Oaks, *Response to Jens Høyrup's "Answer to Jeff Oaks'review"* cit., p. 1). Les réponses très détaillées d'Høyrup aux susdits arguments sont dans Høyrup, *Answer to Jeffrey Oaks' review* cit., pp. 5-6.

[29] Le problème de l'application des méthodes statistiques dans le domaine de la philologie textuelle a été longuement débattu pendant les quatre-vingt dernières années, après la publication des travaux de Dom Henri Quentin (*Essai de critique textuelle*, Paris 1926) et surtout de Dom Jacques Froger (*La critique des textes et son automatisation*, Paris 1968). Depuis au moins vingt ans, le thème est devenu aussi un des enjeux principaux de la philologie numérique: T. Orlandi, *Informatica umanistica*, Roma 1990; T. Numerico, D. Fiormonte, F. Tomasi, *L'umanista digitale*, Bologna 2010.

> peut être totalement indépendant de l'état de l'original (...). La recherche statistique, sans points de référence précis (dans ce cas, la présence de l'archétype perdu), est dénuée de tout fondement critique-textuel (...). Il est évident que dans les faits graphiques, chaque copiste essayait de tenir compte de l'archétype mais qu'il était également influencé par ses propres habitudes d'écriture. Par conséquence, on peut certainement faire la statistique des fluctuations dans les divers témoins, mais sans l'archétype, comment peut-on comprendre dans quelle mesure les copistes étaient influencés par leurs propres habitudes ou par le désir de reproduire l'original?[30]

Oaks, Van Egmond, Folkerts, Franci[31] soutiennent également que la preuve fondée sur la cohérence stylistique et textuelle des manuscrits est très faible, d'autant plus que – comme le dit Folkerts – «since in the fourteenth and fifteenth centuries there was no standard spelling and not even a standard language in Italy, a scribe would write down an Italian text in a consistent way using his own dialect»[32]. Van Egmond souligne: «The fact that a text seems "coherent" only indicates that the copyist was being consistent, it says nothing about the state of the original»[33]. En plus, il était fréquent chez les auteurs et les copistes d'apporter des modifications dans un texte ou de copier d'entières sections d'autres textes sans en rendre compte[34].

Sur la base de ces considérations, il est plus plausible de supposer que le texte de Jacopo ne contient pas la section algébrique, qui pourrait être une interpolation du XVe. Van Egmond[35] a montré que la section algébrique du manuscrit *V*, en particulier le chapitre 17, avec les équations de troisième et quatrième degré (f. 42), est presque identique aux deux algèbres italiennes[36] qui ont survécu dans deux manuscrits de la fin du XIVe siècle. D'après Van

30 Je remercie Giuseppe Germano (Université de Naples), qui dans deux communications épistolaires datées du 22 et du 29 mars 2012 (gardées dans l'archive de «Reti Medievali - Rivista») m'a donné des éclaircissements au regard, dont j'ai repris les passages les plus éloquents dans mon article. Il ajoute encore dans un de ses lettres: «Il est presque impossible, à moins d'avoir les codes du même scribe qui devraient être comparés à leurs archétypes. Mais même dans ce cas, nous ne serions pas confrontés à rien de convaincant, les copistes étant des hommes et non des machines. (...) On ne pas prouver que le même scribe ait agi de la même manière, non seulement par rapport à deux exemplaires différents, mais aussi par rapport à la même copie dans deux moments différents de la même chose».

31 Franci a écrit, à propos des arguments de Oaks: «Oaks contest this assertion and I fully share his arguments» (Franci, *The History of algebra* cit., p. 183).

32 Voir Folkerts, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 283.

33 *Ibidem*, p. 42.

34 Voir Folkerts, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 283; Oaks, *Essay Review* cit., p. 1.

35 W. Van Egmond, *The study of higher-order equations in Italy before Pacioli*, dans *Mathematics Celestial and Terrestrial: Festschrift fürMenso Folkerts zum 65. Geburtstag*, éd. par J.W. Dauben, S. Kirschner, A. Kuhne, P. Kunitzsch et R. Lorch, Stuttgart 2008, pp. 302-320, en particulier à la p. 313.

36 Biblioteca Nazionale di Firenze, Fond. Priv. II.V.152, ff. 153*r*-166*r*, et Conv. soppr. G.7.1137, ff. 110*r*-111*v*.

Egmond, les deux, avec le texte de *V*, appartiendraient à un groupe de sept manuscrits, qui présentent le même ensemble d'équations et dans le même ordre et qui forment une même tradition textuelle, appelée par Van Egmond "famille Benedetto", du nom du maître d'abaque florentin Benedetto da Firenze (1429-1479)[37], auteur d'un traité d'abaque. Il est possible que cette famille textuelle découle de l'école de Maestro Biagio dell'Abbaco (m. 1397). Sur la base de ces considerations, Van Egmond conclut que le texte algébrique de *V* n'appartient pas au traité de Jacopo: «Clearly the copyist of Vat. Lat. 4826, while revising an old copy of Jacopo's *Tractatus Algorismi*, merely inserted a section on algebra that was being widely circulating in his own day»[38]. D'ailleurs, comme Oaks le souligne:

> The general trend in abbacus manuscripts from simple to complex, and toward improved organization, is turned upside down if we place *V*'s Chapter 17 in 1307. This chapter is more complete than any of the other early algebras (…), and presents all but two reducible cubic and quarter equations in a very logical order, against the jumble we find in Gerardi and other texts from the first half of the 14th c.»[39].

Somme toute, Oaks et Egmond prétendent que le *Libro di ragioni* de Paolo Gerardi (1328) est le plus ancien texte d'algèbre connu à ce jour[40]. Cependant, pourvu que la date de 1328 se réfère au manuscrit qui nous est parvenu, il n'est pas exclu que Gerardi a pu écrire son livre précédemment. En outre, il est très probable que d'autres livres traitant d'algèbre ont été écrits avant 1328. Franci, considérant qu'il est très difficile de faire une évaluation exacte de la datation[41] des manuscrits quand il y a un écart de peu d'années, affirme que le *Tractato dell'arismetricha* (ms. Riccardiano 2252) ou le manuscrit 1754 de Lucques pourraient être contemporains ou même antérieurs au traité de Jacopo da Firenze et donc qu'il n'est pas possible

[37] À ce propos, Høyrup (Høyrup, *Answer to Jeffrey Oaks' review* cit., pp. 7-8) a montré que les règles des équations de degré supérieur à 2 dans le chap. 17 ainsi que le chapitre 16 (sur les équations quadratiques) de *V* sont presque identiques aux parties correspondantes d'un manuscrit daté *post* 1365, noté A (Firenze, Biblioteca Riccardiana, ms. 2263). Pour ce qu'on vient d'exposer, il s'ensuit que la date de composition des chapitres 16 et 17 de *V* pourrait être établie autour de 1365. Voir Oaks, *Response to Jens Høyrup's "Answer to Jeff Oaks' review"* cit., p. 2.

[38] Van Egmond, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 44.

[39] Oaks, *Essay Review* cit., p. 6.

[40] On peut trouver les réponses d'Høyrup aux arguments de Van Egmond et Oaks dans Høyrup, *A response to Van Egmond* cit., pp. 121-124, et dans Høyrup, *Answer to Jeffrey Oaks* cit., pp. 6-10.

[41] D'après Franci, la solution du problème des sources est liée à la datation des manuscrits: «For the most part, they are dated by the watermark on the paper or by internal references on some dates contained in astronomical or commercial problems. It is obvious that such dating has a range of error» (Franci, *The History of algebra in Italy* cit., p. 183).

d'établir quelle a été la première algèbre. En outre, les manuscrits susdits montrent d'être indépendants entre eux[42].

Par ailleurs, Heeffer, quoiqu'il partage la thèse d'Høyrup (que l'algèbre dans le manuscrit *V* appartient au traité original de Jacopo), en comparant le manuscrit de Lucques avec *V*, conclut qu'«il n'est pas établi que le texte de Lucques est tiré du traité de Jacopo»[43].

Concernant la thèse 1.c (que l'algèbre de Jacopo a été la première algèbre de l'abaque jamais écrite et qu'il a appris l'algèbre puisant dans une aire inconnue, peut-être, ibéro-provençale), Høyrup écrit[44]:

> [Jacopo] was apparently the first to introduce the solution to the six fundamental cases and to (most of) those cases of the third and fourth degree that can be reduced by simple means (…) He also appears to have introduced the habit of applying algebra to *mu'āmalāt*-problems.

Il justifie cette affirmation sur la base de l'absence, dans l'algèbre du manuscrit *V*, des abréviations concernant la terminologie de la téchnique algébrique comme si l'auteur était conscient d'introduire un nouveau domaine des savoirs où «readers would be unfamiliar with the terminology and therefore unables to expand abbreviations correctely»[45].

Oaks observe, par contre, que d'autres algèbres du XIVe siècle n'avaient pas d'abréviations[46]. Il s'ensuit qu'il ne s'agit pas d'une preuve suffisante.

Cependant, Høyrup reconnaît que certaines algèbres du XIVe siècle ne dépendent pas entièrement de Jacopo. Dans le but de trouver une sphère (additionnelle) d'influence, Høyrup suppose – sur la base d'hypothèses découlant du *stemma* ayant comme archétype Jacopo da Firenze – que cette zone coïncide avec la région catalane (ou la plus vaste area ibérique)[47] en excluant la Provence (avec Montpellier) à cause du moins d'intérêt algébrique montré par cette région par rapport à l'autre.

Oaks, par contre, observe qu'étant donné que Jacopo da Firenze et Paolo Gerardi ont écrit leurs textes à Montpellier, pourquoi ne pas conclure que cette zone est Montpellier?

Franci, de sa part, rejette la thèse d'Høyrup, parce qu'elle est fondée sur la fausse considération préliminaire que la première algèbre a été celle de Jacopo da Firenze, qui a été composée à Montpellier. Étant donné que les premières algèbres d'abaque auraient pu être composées en Italie (voir plus haut), elle affirme

42 Franci, *The History of algebra in Italy* cit., p. 183.

43 Heeffer, *Text production reproduction* cit., p. 114, cité dans Oaks, *Response to Jens J. Høyrup's "Answer to Jeff Oaks' rewiew"* cit.

44 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 181-182.

45 *Ibidem*, p. 153.

46 Oaks, *Essay Review* cit., p. 7.

47 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 181.

> we can only conclude that in the first decades of the 14th a knowledge of algebra independent from al-Khwārizmī and Fibonacci was widespread in Tuscany, and that its main characteristic are the solution of equations of degree greater than two as well as the application to solve commercial problems, whose origins are probably Arabic. However, we are absolutely unaware of the way in which this algebra reached Italy[48].

De plus, je voudrais souligner que Paolo Gerardi et Jacopo da Firenze étaient nés à Florence, même s'ils travaillaient en Provence (à cause des relations commerciales favorables entre les deux régions) et que leurs traités ont été écrits en toscan. Pourquoi ne pas supposer, alors, que cette zone d'influence est à rechercher en Italie?

2. *Le rôle de Fibonacci dans la tradition de l'abaque*

2.1 *La position d'Høyrup*

Pour ce qui concerne Fibonacci, Høyrup prétend que[49]:

Thèse 2.a) Les mathématiques de Fibonacci n'ont pas (beaucoup) influencé celle des textes d'abaque ultérieurs.

Thèse 2.b) Le *Liber Abaci* découlerait d'une tradition d'abaque italienne, inconnue.

D'une analyse du plus ancien livre d'abaque, d'origine ombrienne[50], Le *Livero de l'abbecho,* Høyrup remarque que si une bonne partie de l'ouvrage a une dette envers Léonard (chapitres 16-31), parmi les chapitres qui traitent des questions marchandes – c'est-à-dire chapitres 1-10 et 12-15 – il n'y a que les chapitres 10 et 12 qui contiennent des problèmes tirés du *Liber Abaci*[51], tandis que dans tous les autres (les chapitres 1-9 et 13-15 sur 31 en total), «nothing is borrowed from Fibonacci»[52]. Ils divergent pour leurs contenus: la règle du trois simple, les règles de conversion, qui sont présentés comme les fondements de l'art du calcul, les règles sur l'intérêt.

En outre, il y a des divergences autant sur la représentation des nombres mixtes – parfois le nombre entier est à droite, parfois à gauche de la fraction, tandis que dans le *Liber Abaci* le nombre entier est toujours à gauche de la

48 Franci, *The History of algebra in Italy* cit., p. 183.

49 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 30-44.

50 Le *Livero de l'abbecho* «secondo la oppenione de maiestro Leonardo de la chasa degli figluogle Bonaçie da Pisa» (Firenze, Biblioteca Riccardiana, ms. 2404, ff. 1*r*-136*v*).

51 À propos du chapitre 10, Høyrup dit: «After ten simple problems that are indipendent of Fibonacci, follow eighteen, some of them more complex, that are borrowed from the *Liber Abaci*» (Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 33).

52 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 32-33.

fraction – que sur la notation de la fraction composée[53] de Fibonacci. De plus, l'auteur du *Livero de l'abbecho* montre une mauvaise compréhension de la *regula recta* – règle avec l'introduction d'une inconnue (res) pour l'application de l'algèbre du premier degré[54]– utilisée dans le *Liber Abaci*. Enfin, la présence d'italianismes (parmi lesquels *avere* comme traduction occasionnelle de *mal* au lieu de *census*) prouverait l'influence sur Fibonacci d'une tradition d'abaque d'origine italienne. Høyrup affirme: «What we can know from the analysis is that the abbacus tradition of the outgoing thirteenth century was *no Fibonacci tradition*, even if it was already a tradition»[55].

D'après Høyrup, donc, la présence dans le *Livero de l'abbecho* de parties divergentes ou innovatrices dans les contenus est suffisante pour formuler la thèse que Fibonacci n'a pas été un précurseur, mais seulement un représentant important d'une tradition d'abaque préexistante[56].

2.2 *Le débat*

Oaks paraît accepter la thèse 2.a, mais il examine de manière critique les preuves apportées par Høyrup. D'après Oaks,

> Perhaps the half century separating the *Liber Abaci* from the *Livero de l'Abbecho* was enough for the Latin work to be condensed, reworked, and amended by an oral tradition, making the nod to Leonardo something more than just "an instance of embellishment" to a "culture hero" [57].

À propos de l'influence d'une tradition d'abaque préexistante italienne, Oaks affirme qu'on ne peut pas en évaluer l'entité, mais – étant donné que Fibonacci a emprunté à de nombreuses sources écrites, y compris les

53 Dans la notation de Fibonacci, le nombre mixte est indiqué ainsi: $\frac{a}{b}c$ avec $a<b$ et la fraction composée ou continue: $\frac{n_3\ n_2\ n_1}{m_3\ m_2\ m_1} = \frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}\left(\frac{1}{m1}\right) + \frac{n_3}{m_3}\left(\frac{1}{m_2\ m_1}\right)$. L'auteur du *Livero de l'abbecho* utilise, de façon erronée, la fraction simple $\frac{n_3\, n_2\, n_1}{m_3\, m_2\, m_1}$ pour dénoter la fraction composée. Voir, entre autres, à la page 11, les problèmes du Chap. 9 marqués avec l'astérisque (où les nombres mixtes $\frac{1137}{22512}\,11$ et $\frac{59}{1220}13$ sont écrits respectivement au lieu de $\frac{1\ 13\ 7}{2\ 25\ 12}$ et $(5\ 9)/(12\ 20)\ 13$) et l'exemple porté dans Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 39.

54 Ce qui témoignerait, d'après Høyrup, de l'ignorance des niveaux les plus élémentaires du savoir algébrique dans l'environnement de l'auteur du *Livero*. Voir Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 39-40.

55 *Ibidem*, p. 41.

56 Voir N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo nell'Europa medievale*, Milano 2008, p. 227.

57 Oaks, *Essay Review* cit., p. 7.

algèbres d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil – , on ne peut nier d'autres influences.

D'après Franci, par contre,

> ¾ environ du *Livero de l'abbecho* sont une traduction fidèle en langue vulgaire des problèmes présents parmi ceux proposés par Fibonacci aux chapitres 8, 9, 10, 11 du *Liber Abaci*(...). L'auteur du *Livero de l'Abbecho* présente par chaque typologie les problèmes les plus simples parmi ceux qui sont proposés par Fibonacci, il omets en outre toute la partie concernant la représentation des nombres, les algorithmes pour les opérations et le calcul avec les fractions[58].

Il n'y a que les questions relatives au calcul des intérêts (chapitres 12, 13 et 14) qui sont absentes dans Fibonacci. D'après Franci, la source possible du *Livero* serait le Livre «*de minore guisa*» de Fibonacci, qui ne nous est pas parvenu[59]. À appui de cette hypothèse[60], Franci observe que beaucoup de traités successifs au *Livero* suivent la même structure.

Tout en partageant, à mon tour, l'opinion de Franci, c'est-à-dire qu'il n'y a que les questions relatives au calcul des intérêts (chapitres 12, 13 et 14) qui sont absentes dans Fibonacci, je ne crois pas, comme l'affirme Høyrup, que les chapitres 1-9 du *Livero* n'aient aucune dette envers le *Liber Abaci* de Fibonacci et que les dix premiers problèmes du chapitre 10 soient indépendants de Fibonacci. En effet, j'ai trouvé, dans les susdits chapitres, même avec une lecture superficielle, des problèmes identiques ou très similaires, bien que parfois les unités métrologiques soient différentes, comme le montre le schéma ci-après. On ne peut donc pas conclure, comme le fait Høyrup, qu'aux chapitres 1-9 « nothing is borrowed from Fibonacci». L'emprunt de l'auteur du *Livero de l'abbecho* à Fibonacci est bien plus fort, même dans les chapitres à caractère commercial.

Livero de l'abbecho	*Liber Abaci*
Firenze, Biblioteca Riccardiana, ms. 2404, ff. 1*r*-136*v*	*Scritti di Leonardo Pisano*, éd B. Boncompagni, 1857, I

[58] R. Franci, *Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abaco nei secoli XIV e XV*, dans «Bollettino di storia delle scienze matematiche», 23 (2003), pp. 33-54, in particolare p. 38.

[59] R. Franci, *Il* Liber Abaci *di Leonardo Fibonacci*: *1202-2002*, dans «Bollettino della Unione matematica italiana», 5 (2002), A, pp. 293-328, in particolare p. 303, rapporte que dans un manuscrit du XVe de la Biblioteca Nazionale di Firenze il est mentionné comme le *Libro di merchaanti detto di minor guisa*. L'ouvrage est cité par Fibonacci au chapitre XI (Boncompagni, Liber Abaci, p. 154): «Est enim alius modo consolandi, quem in libro minoris guise docuimus» (il y a en effet une autre manière de faire l'alliage, que nous avons enseignée dans le *livre de minore guisa*).

[60] Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 41, référence 107, polémique contre la susdite hypothèse.

Chap. 1. *De le regole de le tre cose*	Chap. VIII, Section III
p. 9 (f. 1*r*): «bracia 4 1/3 di panno vaglono 17 d. g que ne varronno gle 5 bracia?»	p. 111 (f. 46*v*): «si canna pisana, que est brachia 4 cuiuslibet panni vendatur pro soldis 7,et queratur quantum valet brachium 1 (…)» (changement des valeurs des unités métrologiques)
Chap. 2. *De le cose che se vendono a centonaio*	Chap. VIII, Section I
p. 10 (f. 2*r*): «per ciascheduna lib. che vale lo centonaio, si vale la lib. 2d. 2/5 e l’oncia 1/5 de d.»	p. 85 (f. 35*r*): «De eodem cum queritur precium de Rotulis»: «Ex hoc ergo manifestum est, quod de unaquaque libra denariorium, que divisa fuerit per 100, perveniunt denarii $\frac{2}{5}2$»
p. 11 (f. 3*r*): «E’ en perciò che quista regola»	p. 101 (f. 41*v*): «Regula universalis in centenario»
Chap. 3. *De le regole del pepe che senno*	Chap. VIII, Section I «*De centum piperis*»
p. 12 (f. 3*v*): «Se la volemo provare sì devemo dire: lo centonaio de pepe vale 17 libre, que ne verrà le 80 libre?»	p. 89 (f. 36*v*): «Item centum piperis valet libras $\frac{9}{20}11$, quantum valent ergo libre $\frac{1}{4}\frac{5}{12}46$»
p. 13 (f. 4*r*): «se ‘l centonaio del pepe vale lib. 16 s. 10 que ne verrà le libre 33 e oncie 4?»	p. 90 (f. 37*r*): «Item centum valet libras 12 et soldos 13 et denarios 5 (…) quantum valet uncia $\frac{1}{9}\frac{3}{4}5$»
Chap. 4. *De le regole degle drappe che se vendono a channa e a bracia*	Chap. VIII, section III
Chap. 5. *De regole del chanbio*	Chap. VIII
p. 15 (f. 6*v*): « La marca d’argento»	p. 109 (f. 45*v*): «De marcha argenti»

Chap. 6. *Regole de baracte de monete e denari*	Chap. IX
p. 24 (f. 15*r*): «Bracia 20 de panno» p. 24 (f. 15*r*): «Se ne fosse dicto che libre 7 de pevere» p. 23 (f. 14*r*): «El soldo degle enperiagle vale pisane»	p. 118 (f. 48*v*): «Brachia 20 panni valeant» p. 120 (f. 49*v*): «De pipere ad zafranum» p. 124 (f. 51*v*): «De imperialibus ad piperem»
Chap. 7. *Regole de marcho del Tresçe*	
Chap. 8. *Quante d. de chantra e charrube è l'onzia*	Chap. VIII
p. 27 (ff. 17*r*-17*v*): «Uno volea comparare argento misticato conn estagno»	p. 111 (f. 46*r*): «Quidam voluit emere argentum commixtum cum stagno»
Chap. 9. *De comparare bolçone a numero de denare ed a peso de libre*	Chap. IX
p. 27 (ff. 17*v*- 18*r*): «Uno che avea libre 11 d'uno bolzone…, onzie 2 d'argento»	p. 127 (f. 53*r*): «Quidam habet libras 11 cuiusdam bolsonalie, que est ad uncias 2 argenti»
p. 28 (f. 8*v*)*: «Uno avea libre 11 e onçie 7 e d. 7 de cantra $\frac{1}{2}$ 13 cioè libre $\frac{1137}{22512}$ 11 (…) »	p. 129 (f. 53*v*): «Item quidam habet libras 11 argenti et uncias 7, de cantera $\frac{1}{2}$ 13 hoc est libras $\frac{1\ 13\ 7}{2\ 25\ 12}$ 11
p. 29 (f. 19*r*): «Uno avea libre 13 e s. 7 d'uno bolçone, libra 31»	p. 129 (f. 53*v*): «*De bolsonalia cum venditur ad numerum*»
p. 29 (f. 19*v*)*: «Anchora unoch'avea lib. $\frac{59}{1220}$ 13 »	p. 130 (f. 53*v*): «De eodem» «Item sint libre $\frac{5\ 9}{12\ 20}$ 13 »
p. 30 (f. 20*r*) «Uno ch'avea s.11 e denare 7»	p. 130 (f. 54*r*): «Item quidam habet soldos 11 et denarios 7»

Chap. 10 *De regole de consolare ed alegare monete*	Chap. XI
pp. 30-31 (ff. 20*v*-21*v*)	Les problèmes à coté puisent dans la méthode d'alliage du *L.A*[61] exposée à partir de la *Differentia* VI (*L.A.* p. 151), en particulier. comme il est décrit dans le Livre *De minore guisa* (*L.A.* p. 154)

Pour ce qui concerne les divergences sur la représentation des nombres mixtes, cela, à mon avis, ne constitue pas une preuve significative à l'appui de l'écart entre le *Livero* et le *Liber Abaci*. Il faut réfléchir sur le fait que, dès la fin du XIIe en Europe, on assiste à un changement des méthodes de représentation des nombres et des pratiques du calcul avec les chiffres indo-arabes[62]. En effet, les notations indo-arabes, concernant l'écriture de nombres mixtes (avec la fraction à gauche) ou de la fraction composée (de droite à gauche), importées et utilisées dans le *Liber Abaci* de Fibonacci, vont changer. On passe d'une écriture de droite à gauche à l'envers. Par exemple, dans un des plus anciens textes d'abaque, l'algorisme de Columbia[63] (vers 1290) on retrouve les fractions composées écrites de gauche à droite. On peut supposer, donc, une certaine oscillation dans l'écriture des nombres, d'autant plus que souvent les scribes ne comprenaient pas bien la notation indo-arabe. En plus, comme on l'a vu plus haut, il était fréquent chez les auteurs et les copistes de copier d'entières sections d'autres textes sans en rendre compte.

Ainsi, le scribe du *Livero* aurait pu copier des sections avec la numération de droite à gauche et des autres à l'envers.

À propos de la thèse 2.b, c'est à dire que le *Liber Abaci* découlerait d'une tradition d'abaque italienne, inconnue, Høyrup souligne qu'au chapitre X du *Livero* les premiers problèmes sur l'alliage des monnaies – qui ne découlent pas du *Liber Abaci* – commencent à la première personne du singulier et que cet usage est très fréquent également dans les traités d'abaque suivants. Par contre – souligne le spécialiste – dans le *Liber Abaci* tous les problèmes d'alliage commencent de façon différente, sauf un ou deux cas[64]. On n'a aucune raison de croire, conclut Høyrup, que ce cas unique de Fibonacci a pu

61 *L.A.* est l'abréviation du *Liber Abaci* de Léonard de Pise. Voir Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano* cit., I.

62 A. Heeffer, *Epistemic Justification and Operational Symbolism*, à l'url <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10699-012-9311-x#page-1>, pp. 3-4, pp 1-20 (consulté le 13/07/2013).

63 K. Vogel, *Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A13)*, München 1977.

64 Boncompagni, Liber Abaci cit., p. 153.

constituer un modèle pour le *Livero* et la tradition de l'abaque. Il aurait dû y avoir une tradition préexistante à Fibonacci. «There is no doubt that Fibonacci (…) was familiar with a tradition that influenced the style of later abbacus writings heavily»[65].

En résumant, l'argumentation d'Høyrup est la suivante: étant donné que dans le *Liber Abaci* il y a une pénurie d'expressions linguistiques à la première personne du singulier (une ou deux maximum), tandis que celles-ci abondent dans le *Livero* ainsi que dans la tradition de l'abaque suivante, il n'est pas possible que Fibonacci a été une source pour les traités d'abaque postérieurs. Les maîtres d'abaque, ainsi que Fibonacci-même, ont puisé dans une tradition préexistante.

Cet argument, à mon avis, est faible. En effet, une lecture attentive du chapitre XI du *Liber Abaci* nous montre qu'il y a (au moins) 20 occurrences d'expressions à la première personne du singulier[66], parmi lesquelles il y en a deux qui sont au début des problèmes[67], les restantes sont à l'intérieur ou à la fin du procédé résolutif; elles sont introduites par des expressions telles que «Ergo/ Qua re dicas: habeo monetam…» qui indiquent le départ de la procédure de résolution selon la méthode d'alliage des monnaies («Quapropter ut redigatur haec questio ad monetarum consolamen dices: habeo monetam»)[68]. Certes, il est vrai que le style d'écriture indique une sorte de procédure *standard*, mais, considéré la fréquence de ce type de locutions dans le *Liber Abaci*, rien ne démontre que Fibonacci a puisé ce style linguistique (ou même le procédé résolutif) dans une tradition préexistante, d'autant plus que Fibonacci explique cette même procédure dans la *Differentia sexta*[69] et qu'il réfère avoir exposé la même méthode dans un autre livre qui a été perdu, le *Libro de minore guisa*[70].

Quand-même, je crois que l'existence d'une tradition de l'abaque préexistante à Fibonacci est possible – le Pisan y se réfère du moins trois fois dans le *Liber Abaci*, comme l'a d'ailleurs souligné Høyrup[71]–. Mais les preuves qu' Høyrup porte à ce sujet ne sont pas du tout convaincantes. Somme toute, je partage l'opinion de Franci qui, tout comme Egmond[72] et

65 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 43.

66 Boncompagni, Liber Abaci cit., pp. 143, 148, 153 (2 fois), 155 (2 fois), 156, 157, 159 (3 fois), 160 (2 fois), 161 (2 fois), 162, 163 (2 fois), 164, 165.

67 *Ibidem*, pp. 143, 155.

68 *Ibidem*, p. 163, lg. 19.

69 *Ibidem*, p. 151.

70 *Ibidem*, p. 154.

71 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 42.

72 Van Egmond, *Practical Mathematics* cit., p. 7, affirme que tous les texts d'abaque «can be regarded as… direct descendants of Leonardo's book», citation tirée de Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 31, référence 69). Par contre, comme le souligne Oaks concernant les sources de l'algèbre de l'abaque, Van Egmond reconnaît qu'elles sont differentes par rapport aux textes latins disponibles (Oaks, *Essay Review* cit., p. 4; Van Egmond, *The study of higher-order equations* cit.).

Folkerts[73] juge Fibonacci un point de repère des textes d'abaque. Franci, tout en considérant la possibilité que le *Livero de l'abbecho* appartient moins au *stemma codicum* du *Liber Abaci* qu'à celui du *Livre de minore guisa* de Fibonacci, situe quand même le texte ombrien dans la tradition du mathématicien pisan.

3. *Les sources de l'algèbre* de l'abaque

D'après Høyrup, l'algèbre de *V* ne découle pas du Liber Abaci ni d'al-Khwārizmī ni d'aucune édition latine d'al-Khwārizmī, mais du monde islamique, peut-être de la Mu'āmalāt, à travers un canal de diffusion peut être ibéro-provençal (Thèse 3.a)

Les preuves d' Høyrup[74] portent surtout sur les arguments suivants:

3.a.1) Les six types d'équations de l'algèbre arabe[75] se retrouvent dans l'algèbre de l'abaque, mais en général elles se réfèrent à (beaucoup) plus de types et elles apparaissent dans un ordre différent par rapport à al-Khwārizmī (et à ses adaptations latines) et à Fibonacci[76].

3.a.2) Normalisation[77]. Les règles de résolution des équations de l'algèbre arabo-latine s'appliquent aux cas normalisés où le coefficient du terme carré est un, sauf le cas "racines égal nombres". Dans tous les traités d'abaque, les règles s'appliquent aux cas non-normalisés. La première étape dans la résolution consiste à diviser les termes par le coefficient du terme carré, même si cette étape implique diviser par un.

3.a.3) Exemples[78]. Une différence entre l'algèbre de *V* (et toute l'algèbre de l'abaque) et celle de l'algèbre arabo-latine est que dans cette dernière les exemples sont donnés en termes de *nombre*, de *choses* et de *censi*[79] tandis que cela ne se vérifie pas dans *V* où les exemples sont des problèmes d'arithmétique théorique ou de pratique marchande.

73 Folkerts affirme que le *Liber Abaci* «devint un des premiers instruments à l'aide duquel le monde européen apprit le nouveau système de numération Arabe et son application aux mathématiques pratiques de tous les jours. Dès la fin du XIIIème siècle jusqu'autour de 1600, plus de 400 libri d'abbaco ont survécu» (Folkerts, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., p. 282).

74 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 148, 154-156.

75 La classification courante des équations d'après al-Khwârizmî est:
1. $ax^2 = bx$; 2. $ax^2 = n$; 3. $bx = n$; 4. $ax^2 + bx = c$; 5. $ax^2 + c = bx$; 6. $bx + c = ax^2$.

76 Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 148, 154-155.

77 *Ibidem*, p. 155.

78 *Ibidem*, pp. 149-150, 155-156.

79 L'inconnue x était appelée dans l'algèbre médiévale radix ou *res* en Latin, *jidhr* ou *shay en* Arabe, *cosa* ou *radice* en Italien; le carré x^2 *census* en Latin, *mal* en Arabe, *censo* en Italien; le terme constant: *numerus*, *denarius*, *dracma* en Latin, *'adad mufrad* en Arabe.

3.a.4) Sources arabes. D'après Høyrup[80], d'autres sources, différentes des traductions latines d'al-Khwārizmī ou d'Abū Kāmil et du *Liber Abaci* de Fibonacci sont supposées avoir exercé leur influence sur l'origine de l'algèbre de Jacopo da Firenze. Il identifie ces sources dans la tradition du calcul des transactions du monde musulman (*mu'āmalāt)* étant donné qu'une des caractéristiques de l'algèbre de ces traités (et des algèbres des premiers traités d'abaque italiens) est le *problem solving* appliqué au calcul commercial. La région géographique où cette influence s'est exercée serait, comme on l'a déjà dit, la région catalane (ou la plus vaste area ibérique).

3.2 *Le débat*

La thèse 3.a est estimée vraie par Oaks, mais pas nouvelle[81]. Il conteste plusieurs preuves apportées par J. Høyrup. Je vais présenter brièvement quelques-unes de ses objections[82].

La thèse 3.a.1 est jugée correcte par Oaks.

Concernant la Normalisation (thèse 3.a.2), Oaks prétend que dans tous les manuscrits arabes de l'algèbre d'al-Khwārizmī de même que dans ses versions latines, en particulier dans la traduction latine de Robert de Chester et dans celle de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil, les règles des équations sont au pluriel, donc s'appliquent aux cas non normalisés. La preuve d'Høyrup est donc fausse.

Quant aux Exemples (thèse 3.a.3), Oaks n'accepte pas la définition d'Exemples donnée par Høyrup. Il souligne qu'Høyrup met sur le même plan les équations simplifiées et les problèmes d'application des règles. Il dit: «Under the Heading "Exemples", Høyrup confuses the sample equations found in Arabic and Latin works with the sample worked-out problems (…) given after each rule in *V* (and indeed in most abaque text)»[83].

D'après Oaks, Al-Khwārizmī (de même que ses versions latines) ne donne les règles de résolution des équations du deuxième degré que dans un contexte d'équations spécifiques exprimées en termes de nombre, de choses et de *censi* (par exemple, concernant l'équation du type 6, il explique la règle dans le cas spécific de $3x + 4 = x^2$). Ensuite, après avoir présenté les six règles de résolution, il donne une liste de six équations "type" simplifiées, une pour chaque type d'équation. *V*, par contre (et toute l'algèbre de l'abaque), donne

[80] Høyrup écrit au début de son ouvrage: «Reductible fourth-degree equations were solved routinely in Arabic algebra at least since al-Karaji's time and therefore were no innovation, neither in 1307 nor in the late fourteenth century». Et plus haut, en analysant les sources arabes possibles de Jacopo: «We don't know the kind of Arabic algebra that provided him with his ultimate inspiration, but it was certainly different from those (scholarly or "high") currents that have so far been investigated by historians of mathematics; we may also conclude with fair certainty that it was linked to an institution that taught algebra as integrated in *mu'āmalāt*-mathematics» (Høyrup, *Jacopo da Firenze's* Tractatus Algorismi cit., pp. 5, 159).

[81] Voir référence n. 72.

[82] Oaks, *Essay Review* cit., pp. 8-9.

[83] *Ibidem*, p. 9.

d'abord la règle générale dans sa forme abstraite (dans le cas du type 6, *V* donne la règle ax+b= x^2) suivie d'un problème applicatif dont l' énoncé n'est pas exprimé en termes de *nombres*, de *choses* et de *censi*. Fibonacci par contre donne d'abord les règles générales (comme *V*) suivies par la résolution d'une équation "type" simplifiée (comme al-Khwārizmī). Donc, on ne peut pas en conclure – observe Oaks – que Fibonacci n'ait eu aucune influence sur l'algèbre de l'abaque à ce sujet, mais on ne peut pas affirmer le contraire, étant donné que ni le *Liber Abaci* ni aucun texte latin n'ont complété leurs règles algébriques avec des problèmes applicatifs.

Franci, de son côté, est tout à fait d'accord avec Oaks, sauf qu'elle reconnaît trois traditions algébriques italiennes différentes par rapport à al-Khwārizmī et à Fibonacci: celles de Gerardi, de Jacopo et de Dardi.

Concernant les possibles influences de sources arabes sur l'algèbre des équations du quatrième degré (thèse 3.a.4), Van Egmond[84] souligne qu'on n'a pas encore trouvé un texte arabe qui puisse témoigner de cette influence. Franci estime possible une influence des mathématiques arabes sur l'algèbre des traités d'abaque, mais d'une part, l'absence de toute sorte d'arabismes dans ceux-ci exclut une dérivation directe, de l'autre la connaissance actuelle des traités de la *mu'āmalāt* arabe nous porte à écarter la présence de textes arabes similaires[85].

4. *Faisons le point*

4.1 *Une synthèse*

Concernant les sources des textes d'abaque in italien du XIVe siècle, j'ai exposé les principales thèses d'Høyrup, déclinées selon trois questions telles que la genèse du premier texte d'algèbre en italien; le rôle joué par Fibonacci dans la tradition de l'abaque; l'existence d'autres sources outre Fibonacci et al-Khwārizmī pour l'algèbre de l'abaque.

Au regard de la première question, Høyrup prétend que le premier traité d'algèbre en Europe appartient au *Tractatus Algorismi* de Jacopo da Firenze composé en 1307 et qu'il a appris l'algèbre puisant dans une aire inconnue (?), peut-être, ibéro-provençale. À soutien de cette thèse, il montre l'appartenance du plus récent manuscrit *V* (contenant l'algèbre) au traité original de Jacopo [voir 1.1].

84 «No source is ever given for this very expensive claim and the editor himself, after an exhaustive comparison with 13 Arabic algebras listed on page 154, not only fails to identify any such source but states, «we do not know the kind of Arabic algebra that provided him [Jacopo] with his ultimate inspirations, i.e. there is no Arabic source for the equations in the Vatican manuscript». Voir Van Egmond, *Iacopo da Florence's* Tractatus Algorismi cit., p. 43.

85 «Unfortunately, this field of Arabic mathematic [*Mu'āmalāt*] is still little studied, so no text containing an algebra treatise similar to the Italian ones is avalaible!». Voir Franci, *The History of algebra in Italy* cit., p. 183.

Il n'y a qu' Heeffer à faveur des preuves d'Høyrup, tandis que Van Egmond et Oaks considèrent que le plus ancien traité d'algèbre connu à ce jour est celui de Paolo Gerardi (1328) mais il n'excluent pas la possibilité que Gerardi ait composé son texte avant 1328 ou que d'autres manuscrits traitant d'algèbre aient été composés avant cette date. Franci, de sa part, tout en partageant les critiques aux arguments d'Høyrup, considère possible que d'autres traités composés en Toscane tels que le *Tractato dell'arismetricha* (Ricc. 2252) ou le manuscrit 1754 de Lucques, aient précédé celui de Gerardi [Voir 1.2].

À propos du rôle joué par Fibonacci dans la tradition de l'abaque, Høyrup estime que le mathématicien pisan n'a pas été la source de la tradition de l'abaque, mais que celle-ci avec Fibonacci ont puisé dans une tradition préexistante, inconnue, possiblement italienne [Voir 2.1].

A ce sujet, Oaks juge possible la position d'Høyrup, bien qu'il examine de manière critique les preuves apportées par lui et qu'il reconnaisse d'autres influences sur les mathématiques de Fibonacci. Par contre, Franci, Van Egmond, Folkerts (et moi-même) jugent Fibonacci un point de repère des textes d'abaque. Franci, tout en considérant la possibilité que le *Livero de l'abbecho* appartient moins au *stemma codicum* du *Liber Abaci* qu'à celui du *Livre de minore guisa* de Fibonacci, situe quand même le texte ombrien dans la tradition du mathématicien pisan [Voir 2.2].

Enfin, sur la troisième question, Høyrup porte des preuves que les sources de l'algèbre de l'abaque sont différentes des traductions latines d'al-Khwārizmī et du Liber Abaci de Fibonacci, sources qu'il identifie avec le calcul des transactions de la *mu'āmalāt* musulmane [Voir 3.1]. La thèse d'Høyrup est jugée vraie, mais pas nouvelle par Oaks, qui par contre, de même que Van Egmond et Franci, rejette la plupart des arguments à soutien de cette thèse. Concernant les possibles influences de sources arabes sur l'algèbre des équations du quatrième degré, on n'exclut pas cette possibilité mais il y a l'opinion partagée qu'on n'a pas trouvé jusqu'ici un texte arabe qui soit similaire aux traités d'algèbre de l'abaque [Voir 3.2].

4.2 *Mon point de vue*

Je crois que Fibonacci a été un point de repère de la tradition de l'abaque, mais pas l'unique représentant. Quelle était cette tradition? Il s'agissait, peut être, d'une tradition de calcul pratique (calcul oral, calcul avec les mains, un ensemble de règles de prompte mémorisation) qui était présente en Italie, de diffusion locale. On ne sait pas si on utilisait les chiffres indo-arabes. Il est possible que ce nouveau système de numération circulait très vitement dans les milieux marchands – qui représentaient du temps de Fibonacci, dans les villes italiennes, la partie la plus avancée de la société – parce qu'il répondait à un besoin impérieux de développement professionnel. Concernant l'influence de la *mu'āmalāt* sur l'algèbre des traités d'abaque, il faudrait avoir des preuves.

J'estime que la présence de parties divergentes ou innovatrices dans le texte ombrien n'est pas un argument suffisant pour prétendre que Fibonacci n'a pas été un point de repère pour les textes d'abaque ultérieurs. À mon avis, la parution de quelques centaines des traités d’abaque en italien, après Fibonacci, la ressemblance entre le projet didactique de quelques écoles d’abaque et la structure du *Liber Abaci*[86], le nombre des manuscrits du traité, 17 au moins, que nous a livré la tradition manuscrite[87], sont des traces significatives témoignant de l’influence du Pisan sur ses contemporains et sur ses descendants. En même temps, je ne crois pas qu’on puisse tirer des conclusions “absolues” sur l’origine de la tradition de l’abaque, aussi bien du côté du calcul arithmétique que du côté de l’algèbre. On connaît encore très peu de la pénétration des mathématiques arabes en Occident et de ses zones d’expansion. Il s’agit d’une zone “grise” qui n’a pas encore assez été éclaircie.

4.3 *Conclusion*

On a vu qu’il y a, parmi les spécialistes, un certain désaccord envers les positions d’Høyrup. C’est la méthodologie démonstrative de celui-ci qui a été critiquée, par le fait qu’elle est fondée sur des preuves réfutables ou au moins incertaines. On lui reproche, donc, un certain manque de control des hypothèses de travail. Mais ce désaccord est adressé, dans quelques cas, moins à ses thèses qu’à ses arguments. Autrement dit, en dépit de la polémique, les positions finales sont moins éloignées qu’elles semblent. Entre autres, l’opinion qu’au moins pour ce qui regarde l’algèbre, al-Khwārizmī et Fibonacci n’ont pas été l’unique point de repère pour la tradition de l’abaque postérieure.

Somme toute, comme souligne Oaks[88], «Høyrup has done the field a great service by pointing out that abbacus texts are not merely vulgarized compendia of Fibonacci’s *Liber Abaci*». En outre, ce débat, très ample et très riche, a eu le mérite, à mon avis, d’avoir mis en lumière plusieurs questions intéressantes au niveau méthodologique, parmi lesquelles celles concernant l’interprétation linguistique de textes anciens et l’interconnexion des méthodologies provenant de domaines différents, tels que la statistique et la philologie.

Eva Caianiello
École des hautes études en sciences sociales, Paris
eva.caianiello@gmail.com

86 Si on étudie la structure des chapitres composant le *Liber Abaci* et on la compare avec la structure et les programmes d’enseignement de quelques écoles d’abaque, on est étonné par la ressemblance de l’articulation des contenus, ce qui permet de constater indirectement le fil qui unit Fibonacci à l’enseignement des écoles d’abaque à venir: R. Franci, *L’insegnamento dell’Aritmetica nel Medioevo*, dans *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medievale*, P. Freguglia, L. Pellegrini, R. Paciocco (dir.), Chieti 1996, pp. 111-132.

87 E. Burattini, E. Caianiello, C. Carotenuto, G. Germano, L. Sauro, *Per un’edizione critica del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci*, dans *Forme e modi delle lingue dei testi tecnici antichi*, éd. par G. Matino, Napoli 2012, pp. 51-138, particulièrement pp. 85-88.

88 Oaks, *Essay Review* cit., p. 12.